Практическое занятие №4.

Задачи для самостоятельной работы студента

Решение задач по темам: **Функция. Нахождение пределов функций.**

1. Найти области определения (существования) следующих функций:

   a) $y=\sqrt{x^2-6x+5}$; b) $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$; c) $y=1/\sqrt{x^2+x}$;

2. Определить четность, нечетность функции a) $f(x)=|x|+2$, б) $f(x)=|x+2|$,

3. Найти пределы указанных функций.

   1. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+3}{x^2-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x^2+10}{8-x^3}$

   2. a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2+4x^2+3x^2}{x^3-7x-10}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-3x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

   3. a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-7x+6}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$

   4. a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

   5. a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$

   6. a) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^x$

   7. a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))\right)$

      d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 10x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 7x}$ f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin 3(x+1)}{x^2-4x-5}$ g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{tg(x^2-3x+2)}{x^2-4}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи из Лекции №4 (ФИТ)

Пример 1. *Найти область определения функции* $y=\sqrt{x-1}$.

Пример 2. *Найти области определения и значений функции* $y=\lg(4-3x-x^2)$.

Пример 3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4}{3x+5}$.

Пример 4. *Найти* $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

Пример 5. *Найти* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$.

Пример 6. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}$.

Пример 7. *Найти* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

Пример 8. *Функция y=f(x) задана аналитической формулой* $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+3}$. *Найти f(-x), f(|x|).*

Пример 9. *Найти* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\sin 3x}$

Пример 10. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{5x}$.

Пример 11. *Найти предел* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

Пример 12. *Найти* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Примеры: Найти области определения функций:

1) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin\dfrac{x+2}{3}$;

1) Функция a^x, $a > 0$ определена при всех действительных значениях x, поэтому функция $2^{\frac{1}{x}}$ определена в точности при тех значениях x, при которых имеет смысл выражение $\dfrac{1}{x}$, т.е. при $x \neq 0$.

Далее, область определения второго слагаемого находим из двойного неравенства $-1 \leqslant \dfrac{x+2}{3} \leqslant 1$. Отсюда $-3 \leqslant x+2 \leqslant 3$, т.е. $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

Область определения функции $f(x)$ есть пересечение областей определения обоих слагаемых, откуда $D(f) = [-5; 0) \cup (0; 1]$.

2) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}} - 7\cos 2x$.

2) Функция $7\cos 2x$ определена при всех действительных значениях x, а функция $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x - x^2}}$ — лишь при тех значениях x, при которых $2x - x^2 \neq 0$, т.е. при $x \neq 0$, $x \neq 2$.

Таким образом, $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. ●

Примеры: Какие из следующих функций четные, какие нечетные, а какие - общего вида:

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$;

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, и, стало быть, область определения функции симметрична относительно начала координат. Кроме того, $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$, т.е. данная функция нечетная.

2) $f(x) = x^4 - 5|x|$;

2) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = (-x)^4 - 5|-x| = x^4 - 5|x| = f(x)$. Следовательно, функция четная.

3) $f(x) = e^x - 2e^{-x}$;

3) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $f(-x) = e^{-x} - 2e^x \neq \pm f(x)$, т.е. данная функция общего вида.

4) $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4) $D(f) = (-1; 1)$, т.ė. область определения симметрична относительно нуля. К тому же $f(-x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\dfrac{1-x}{1+x} = -f(x)$, т.е. функция нечетная. ●

Примеры: Найти пределы указанных функций.

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{2+2}{2-3}=-4.$$

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi};$$

Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y=x-\frac{\pi}{2}$. Тогда $y\to 0$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, а $x=y+\frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{y\to 0}\frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{2y}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=-\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

3)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x}=\frac{e^3}{e^{-2}}=e^5.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}$$

4) Сделав замену $y=2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{\frac{7}{2}y}=\frac{2}{7}\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\frac{2}{7}.$$

Пример:

Найти пределы справа и слева функции $f(x)=\operatorname{sign} x$ в точке $x_0=0$.

Так как $f(x)=1$ при $x>0$, то

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}1=1.$$

Аналогично находим:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-1)=-1.$$

Примеры:

Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos x}$.

1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin\alpha x \sim \alpha x$, $x\to 0$. Отсюда (при $x\to 0$) $\sin 4x\sim 4x$, а $\sin 3x\sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}.$$

2) При $x\to 0$ имеем $e^x-1\sim x$ и $1-\cos\sim\dfrac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(e^x-1)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)}=2.$$

155. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

◀ Разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{x}$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$ ▶

157. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

◀ Очевидно,

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}=2\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{12}{5}.$$ ▶